6. Answer Part A OR Part B: 2×3.5 = 7

Part A

(a) If $y_t = -3y_{t-1} + 4$, $y_0 = 1$

(i) Solve the difference equation.

(ii) Solve for the steady state if it exists. Is the time path for y_t convergent? Illustrate the time path through a graph.

(b) Find the area of the region bounded by the curve $y^2 = 4x$ and the line $x = a$.

Part B

(a) The initial population of a country is 12.5×10^6. The birth rate is 0.04, the death rate is 0.03, and 50,000 migrants arrive in the country each year. Write a difference equation to represent the given situation and solve it. Does the population converge to the steady state?

(b) Find the area of the region bounded by the curve $y = 7 - x^2$ and the x-axis between $x = -1$ and $x = 2$.

भाग A या भाग B का उत्तर दीजिये : 2×3.5 = 7

भाग A

(क) यदि $y_t = -3y_{t-1} + 4$, $y_0 = 1$ है :

(i) अंतर समीकरण का हल ज्ञात कीजिये।

(ii) स्थिर अवस्था के लिये हल कीजिये यदि यह अस्तित्व में है। क्या y_t का समय पथ संसृत है? समय पथ का रेखाचित्र बनाएँ।

(ख) वक्र $y^2 = 4x$ एवं रेखा $x = a$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

भाग B

(क) एक देश की प्रारम्भिक आबादी 12.5×10^6 है। जन्म दर 0.04 है, मृत्यु दर 0.03 है, और प्रत्येक साल देश में 50,000 प्रवासी आते हैं। इस स्थिति के लिये एक अंतर समीकरण लिखें और उसका हल निकालें। क्या आबादी स्थिर अवस्था पर अभिसरण करती है?

(ख) वक्र $y = 7 - x^2$ एवं x-अक्ष ($x = -1$ और $x = 2$ के बीच में) से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

3 100

12/12/17 (M)

This question paper contains 8 printed pages.

Your Roll No. ....

Sl. No. of Ques. Paper: **2597** **HC**

Unique Paper Code : **12271102**

Name of Paper : **Mathematical Methods for Economics – I**

Name of Course : **CBCS (Part I)**

Semester : **I**

Duration : **3 hours**

Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

(इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिये गये निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिये।)

NOTE:— *Answers may be written in Hindi or in English; but the same medium should be used throughout the paper.*

टिप्पणी:— *इस प्रश्नपत्र का उत्तर हिन्दी या अंग्रेज़ी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।*

There are six questions in all. All questions are compulsory. A simple calculator can be used.

प्रश्नपत्र में कुल छः प्रश्न हैं। सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। साधारण कैलक्यूलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

P. T. O.

1. Answer any **two** of the following: **2 × 3.5 = 7**

(a) For each of the following propositions A and B, state if A is a necessary condition, or a sufficient condition, or both necessary and sufficient for B to be true:

(i) A: Two numbers x and y are even.

B: The sum of x and y is even.

(ii) A: $x = (-64)^{1/3}$, $x \in \Re$

B: $x = -4$

(iii) A: $x, y,$ and z are three different points on a plane.

B: $x, y,$ and z are three different points on a circle.

(iv) A: $f''(c) = 0$

B: $x = c$ is a point of inflection.

(b) Show graphically the region represented by the set:

$$\{(x, y): y < \frac{1}{|x|} \text{ and } y \geq x^2\}$$

(c) (i) Solve $(3^x - 27)^3 + 18(3^x - 27)^2 = 0$ for x.

(ii) Find the domain and range of the function $f(x) = \ln(16 - x^2)$.

निम्नलिखित् में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिये : **2 × 3.5 = 7**

(क) निम्नलिखित् में से प्रत्येक के लिये लिखें, यदि प्रस्ताव B के सत्य होने के लिये प्रस्ताव A एक आवश्यक शर्त है या पर्याप्त शर्त है या दोनों है :

(i) A: दो अंक x एवं y सम संख्या हैं।

B: x एवं y का योग सम है।

(ii) A: $x = (-64)^{1/3}$, $x \in \Re$

B: $x = -4$

(iii) A: $x, y,$ एवं z एक समतल पर तीन अलग–अलग बिंदु हैं।

B: $x, y,$ एवं z एक वृत्त पर तीन अलग–अलग बिंदु हैं।

(iii) If the interest rate is 10% per annum, should the Board of Directors support Manager A or B?

(c) Examine the function defined by $y = x^{2/3}$. Find the interval(s) over which it is concave and the interval(s) over which it is convex. Use this information to find possible point(s) of inflection. Also identify possible cusp(s) in the function. Substantiate your answer with a graph.

(d) Consider the function $f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1), & -2 \leq x \leq 0 \\ -(x^2 + 1), & 0 < x \leq 2 \end{cases}$

Is there a point on the closed interval [-2, 2] where $f(x) = 0$? Explain.

निम्नलिखित मे से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये : 3×5 = 15

(क) अंतराल [3, 6] पर फलन $f(x) = \frac{10x}{4-x^2}$ के चरम बिंदुओं के अस्तित्व के विषय में आप क्या कह सकते हैं? चरम बिंदुओं को वैश्विक/स्थानीय रुप में वर्गीकृत कीजिये।

(ख) एक होटल के दो प्रबंधक A एवं B होटल के एक बहुमूल्य चित्र की बिकी के बारे में सहमत नहीं हैं। प्रबंधक A तुरंत ही चित्र बेचने के पक्ष में हैं परंतु प्रबंधक B की राय है कि 25 साल की प्रतीक्षा करे। दोनों लेकिन इस बात पर सहमत हैं कि चित्र को यदि t साल के बाद बेच दिया जाता है तो राजस्व निम्नलिखित प्राप्त होगा :

$$W(t) = Ae^{\sqrt{t}}, \ (A > 0),$$

जहाँ ब्याज का सतत चक्रवृद्धि दर $100r\%$ प्रति वर्ष है।

(i) राजस्व $W(t)$ की अनुपातिक वृद्धि ज्ञात कीजिये।

(ii) चित्र बेचने का सर्वोत्तम समय निर्धारित कीजिये।

(iii) यदि ब्याज़ दर 10% प्रति वर्ष है, तो निदेशक मंडल को प्रबंधक A या प्रबंधक B का समर्थन करना चाहिये ?

(ग) $y = x^{2/3}$ फलन की जाँच कीजिये। वे अंतराल ज्ञात कीजिये जहाँ यह फलन अवतल है और जहाँ यह फलन उत्तल है। यह जानकारी का उपयोग करते हुए संभव नति परिवर्तन बिंदु ज्ञात कीजिये। फलन में संभव कस्प भी ज्ञात कीजिये और फलन का रेखाचित्र बनाएँ। एक ग्राफ के द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिये।

(घ) फलन $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & -2 \leq x \leq 0 \\ -(x^2 + 1), & 0 < x \leq 2 \end{cases}$ पर विचार कीजिये। क्या बंद अंतराल [-2, 2] पर कोई एक बिंदु है जहाँ $f(x) = 0$ है? स्पष्ट कीजिये।

continuous everywhere. Also check differentiability at $x = 1$ when $k = k^*$.

निम्नलिखित् मे से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये : 3×5 = 15

(क) दिये गए फलन $f(x) = x^{1/2}$ के लिये,

(i) फलन का द्विघातिय टेलर बहुपद $x = 100$ के आसपास ज्ञात कीजियें।

(ii) भाग (i) का प्रयोग करते हुए, $(102)^{1/2}$ का अनुमानित मूल्य ज्ञात कीजिये।

(iii) भाग (ii) से प्राप्त परिणाम पर आधारित, सन्निकटन की त्रुटि की एक ऊपरी सीमा ज्ञात कीजिये।

(ख) दर्शाएँ कि फलन $f(x) = x^3 + 3x + 1$ का एक ही वास्तविक मूल है।

(ग) संख्या a एवं b ज्ञात कीजिये जिससे फलन $f(x) = ax^3 + bx^2$ का रेखाचित्र बिंदु (-1, 1) से गुज़रे तथा

$x = ½$ इसका नति परिवर्तन बिंदु हो।

(घ) यदि संभव है तो स्थिरांक k का मान k^* ज्ञात कीजिये जिससे फलन

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 2, & x \leq 1 \\ kx^2, & x > 1 \end{cases}$$

हर जगह सतत हो जाए। $x = 1$ पर अवकलन की भी जाँच कीजिये जब $k = k^*$ है।

5. Answer any **three** of the following: 3×5 = 15

(a) Given the function $f(x) = \frac{10x}{4-x^2}$, what can you say about the existence of extreme point(s) in the interval [3, 6]. Classify the extreme point(s) as local and/or global.

(b) Two managers A and B of a hotel have disagreed about the sale of a rare painting. Manager A would like to sell up at once whereas manager B is of the view that the hotel should wait 25 years. Both agree, however, that if the painting is sold t years from now, the revenue received would be:

$$W(t) = Ae^{\sqrt{t}},\ (A > 0),$$

and that the interest rate is $100r$% per annum compounded continuously.

(i) Find the proportional rate of growth of the revenue received $W(t)$.

(ii) Determine the optimum time to sell the painting.

(iv) A: $f''(c) = 0$

B: $x = c$ नति परिवर्तन बिंदु है।

(ख) निम्नलिखित् समुच्चय द्वारा प्रतिनिधित्त क्षेत्र का रेखाचित्र बनायें:

$$\{(x, y): y < \frac{1}{|x|}\ and\ y \geq x^2\}$$

(ग) (i) x के लिए $(3^x - 27)^3 + 18(3^x - 27)^2 = 0$ को हल कीजिये।

(ii) फ[illegible] $f(x) = \ln(16 - x^2)$ का परास (domain) एवं परिसर (range) ज्ञात कीजिये।

2. **Answer any four** of the following: 4×4=16

(a) **Find the** limit if it exists:

(i) $\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$

(ii) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

(b) Find y'' if the equation $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$ defines y implicitly as a function of x.

(c) Find the integer roots for the function $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - 3$.

(d) **Draw the** graph of $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$. Find $f(x)$ and draw its graph in the same **diagram** as the one for $f(x+1)$.

(e) Te[illegible]r convergence:

(i) the sequence $s_n = \{k/n\}_{n=1}^{\infty}$; $k > 0$

(ii) the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5}$

निम्नलिखित में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिये : 4×4=16

(क) सीमा ज्ञात कीजिये (यदि यह अस्तित्व रखती है):

(i) $\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$

(ii) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

(ख) y'' ज्ञात कीजिए यदि समीकरण $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$, y को x के एक अंतर्निहित फलन के रुप में परिभाषित करता है।

(ग) फलन $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - 3$ के पूर्णांक मूलों को ज्ञात कीजिये।

(घ) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ का रेखाचित्र बनाइये। $f(x)$ को ज्ञात करें तथा इसका रेखाचित्र भी $f(x+1)$ के आरेख में बनायें।

(ङ) अभिसरण (convergence) की जाँच कीजिये:

(i) अनुक्रम $s_n = \{k/n\}_{n=1}^{\infty}$; $k > 0$

(ii) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5}$

3. Answer any **three** of the following: $3 \times 5 = 15$

(a) Given the function $f(x) = x^7 - x^5 - x^4 + 2x + 1$, prove that the graph of f has a slope equal to 2 somewhere between $x = -1$ and $x = 1$.

(b) Given the function $f(x) = 2^x$, find its inverse function $g(x)$ and draw the graphs of both $f(x)$ and $g(x)$. Also determine the domain and range for both functions.

(c) Consider functions $f(x) = a - bx$, $g(x) = c - bx$, and $h(x) = mx$ (where $a, b, c, m \in \Re$). Find the elasticity of $f(x)$ and $g(x)$ with respect to x at the points A and B, respectively, where A is the point of intersection of $f(x)$ with $h(x)$, and B is the point of intersection of $g(x)$ with $h(x)$.

(d) Find all asymptotes for:

(i) $y = \frac{x^3+5}{1-x^2}$

(ii) $y = xe^{-3x}$

निम्नलिखित मे से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये : $3 \times 5 = 15$

(क) दिये गए फलन $f(x) = x^7 - x^5 - x^4 + 2x + 1$ में दर्शाएँ कि $x = -1$ एवं $x = 1$ के बीच में कहीं न कहीं फलन के रेखाचित्र का ढाल 2 है।

(ख) दिये गए फलन $f(x) = 2^x$ का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिये एवं $f(x)$ तथा $g(x)$ का रेखाचित्र बनायें। दोनों फलनों की परास (domain) एवं परिसर (range) भी निर्धारित कीजिये।

(ग) फलन $f(x) = a - bx$, $g(x) = c - bx$, एवं $h(x) = mx$ पर विचार कीजिये $(a, b, c, m \in \Re)$। फलन $f(x)$ तथा $g(x)$ की x के सापेक्ष, बिंदु A एवं B पर लोच ज्ञात कीजिये, जहाँ A, $f(x)$ तथा $g(x)$ का प्रतिच्छेदन बिंदु है और B, $f(x)$ तथा $h(x)$ का प्रतिच्छेदन बिंदु है।

(घ) निम्नलिखित की सभी अनन्तस्पर्शी (asymptotes) ज्ञात कीजिये:

(i) $y = \frac{x^3+5}{1-x^2}$

(ii) $y = xe^{-3x}$

4. Answer any **three** of the following: $3 \times 5 = 15$

(a) Given the function $f(x) = x^{1/2}$,

(i) Find the Taylor polynomial of degree 2 for $f(x)$ about $x = 100$.

(ii) Using (i), find an approximate value of $(102)^{1/2}$.

(iii) Find an upper bound for the error of approximation corresponding to the result obtained in (ii).

(b) Show that the function $f(x) = x^3 + 3x + 1$ has exactly one real root.

(c) Find numbers a and b such that the graph of the function $f(x) = ax^3 + bx^2$ passes through the point (-1, 1) and has a point of inflection at $x = ½$.

(d) Find a value k^* for the constant k, if possible, that will make the function

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 2, & x \le 1 \\ kx^2, & x > 1 \end{cases}$$

P. T. O.