

1010

12

- (ख) यह मानते हुए कि ब्याज दर $r=5$ प्रतिशत वार्षिक है, जो लगातार चक्रवृद्धि होती है, तो अगले 10 वर्षों में प्रति वर्ष 10,000 रुपये की आय की स्थिर धारा का वर्तमान और भविष्य का मूल्य ज्ञात कीजिए।



(100)

[This question paper contains 12 printed pages.]

Your Roll No.....

Sr. No. of Question Paper : 1010

J

Unique Paper Code : 12271202

Name of the Paper : Mathematical Methods for
Economics-II

Name of the Course : B.A.(Hons.) Economics

Semester : II

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 75

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. There are 6 questions in all.
3. All parts of a question must be answered together.
4. Use of scientific calculator is allowed.
5. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

P.T.O.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. सभी में 6 प्रश्न हैं।
3. एक प्रश्न के सभी भागों का एक साथ उत्तर दिया जाना चाहिए।
3. वैज्ञानिक कैलकुलेटर का उपयोग करने की अनुमति है।
4. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी प्रश्नों के उत्तर का माध्यम एक ही होना चाहिए।

Attempt any five of the following: (5x15= 75)

1. (a) A student is preparing for exams in 2 subjects, A and B. She estimates the grades G obtained in each subject as a function of time T as:

$$G_A = 20 + 20\sqrt{T_A}$$

$$G_B = -80 + 3\sqrt{T_B}$$

How should she allocate her time if she wishes to

maximise her average grade $\frac{G_A + G_B}{2}$, given that she

Rs. 480. Rice needs 1 labourer/day and wheat needs 2 labourers/day. There are 36 labourers available. The profit on rice is Rs. 100/acre and on wheat is Rs. 120/acre. Using Linear Programming, find the number of acres on which the farmer should sow each crop to maximise profit.

- (b) Find the present and future value of a constant stream of income of Rs.10,000 per year, over the next 10 years assuming an interest rate of $r=5\%$ annually, compounded continuously. (8+7)

- (क) एक किसान के पास 20 एकड़ ज़मीन है जिस पर वह चावल और गेहूँ उगाता है। चावल और गेहूँ के लिए प्रति एकड़ लागत 30 रुपये और 20 रुपये है। उसका बजट 480 रुपये है। चावल के लिए प्रतिदिन 1 मज़दूर और गेहूँ के लिए प्रतिदिन 2 मज़दूरों की ज़रूरत होती है। 36 मज़दूर उपलब्ध हैं। चावल पर मुनाफ़ा 100 रुपये प्रति एकड़ और गेहूँ पर 120 रुपये प्रति एकड़ है। रैखिक प्रोग्रामिंग (Linear Programming) का उपयोग करते हुए, ऐसे एकड़ की संख्या ज्ञात कीजिये जिन पर किसान को अधिकतम मुनाफ़ा कमाने के लिए प्रत्येक फ़सल बोनी चाहिए।

अतः $f(x, y)$ का कार्यात्मक रूप (functional form) इस प्रकार निर्धारित कीजिये कि फलन जिसके स्थिर बिंदु (stationary point) $(0,0)$ पर निम्नलिखित हो:

- (i) सख्त अधिकतम (strict maximum.)
- (ii) सख्त न्यूनतम (strict minimum.)
- (iii) काठी (saddle) बिंदु जहां फलन $f(x,0)$ का सख्त अधिकतम है और फलन $f(0,y)$ का सख्त न्यूनतम है।
- (iv) काठी बिंदु जहां फलन $f(x,0)$ और $f(0,y)$ दोनों में विभक्ति बिंदु (inflection points) होते हैं।

(ख) 1000 हिरण वाले घास के मैदान में जीवित रहने की दर 50 प्रतिशत है और 1000 हिरण प्रति वर्ष पलायन करते हैं। t वर्षों में हिरणों की आबादी का अंतर समीकरण (difference equation) लिखिये और इसे हल कीजिये। स्थिर अवस्था संतुलन (steady state equilibrium) का पता लगाइए और इसकी स्थिरता (stability) और अभिसरण (convergence) पर टिप्पणी कीजिये।

6. (a) A farmer has 20 acres of land on which he grows rice and wheat. The cost per acre for rice and wheat is Rs. 30 and Rs. 20. He has a budget of

has 60 hours to study? What is the value of the Lagrange multiplier, and what is its interpretation?

- (b) What is the equation of the tangent plane of the function $z = f(x, y)$ at (x_0, y_0, z_0) ? Prove that if the function is linearly homogeneous, then all tangent planes to the surface of this function pass through the origin. (8+7)

- (क) एक छात्रा दो विषयों, A और B, की परीक्षा की तैयारी कर रही है। वह प्रत्येक विषय में प्राप्त ग्रेड G का अनुमान समय T के फलन के रूप में निम्नवत लगाती है:-

$$G_A = 20 + 20\sqrt{T_A}$$

$$G_B = -80 + 3\sqrt{T_B}$$

यह देखते हुए कि उसके पास अध्ययन के लिए 60 घंटे हैं।

यदि वह अपने औसत ग्रेड $\frac{G_A + G_B}{2}$ को अधिकतम करना चाहती है, तो उसे अपना समय किस प्रकार आवंटित करना चाहिए? लैग्रेंज गुणक (Lagrange multiplier) का मान क्या है और इसकी व्याख्या (interpretation) क्या है?

(ख) फलन $z = f(x, y)$ at (x_0, y_0, z_0) के स्पर्शरेखा तल (tangent plane) का समीकरण क्या है? सिद्ध कीजिए कि यदि फलन रैखिक रूप से समरूप (linearly homogeneous) है, तो इस फलन की सतह के सभी स्पर्शरेखा तल मूल बिंदु से होकर गुजरते हैं।

2. (a) Let $F(x, y)$ be defined on \mathbb{R}_+^2 . Show that if F is linearly homogeneous, then the slopes of the level curves are equal along any ray $y = cx$.

(b) Given the following system of equations:

$$3x^2z + 6wy^2 - 2z + 1 = 0$$

$$xz - 4\frac{y}{z} - 3w - z = 0$$

Taking w as the exogenous variable, check if the implicit function theorem applies and evaluate

$$\frac{\partial x}{\partial z} \text{ and } \frac{\partial y}{\partial z} \text{ at } (x, y, z, w) = (1, 2, -1, 0) \text{ and } (x, y, z, w) = (1, \frac{1}{2}, 2, -2). \quad (7+8)$$

5. (a) Using polynomials of the form $f(x, y) = ax^3 + bx^4 + cy^3 + dy^4$, determine the value(s) of a, b, c, d and hence the functional form of $f(x, y)$ such that the function that has the following at its stationary point $(0, 0)$:

(i) A strict maximum.

(ii) A strict minimum.

(iii) A saddle point where the function $f(x, 0)$ has a strict maximum and $f(0, y)$ has a strict minimum.

(iv) A saddle point where the function $f(x, 0)$ and $f(0, y)$ both have inflection points.

(b) On a grassland with 1000 deer, the survival rate is 50%, and 1000 deer migrate each year. Write the difference equation of the deer population at t years and solve it. Find the steady state equilibrium and comment on its stability and convergence.

(10+5)

(क) फॉर्म $f(x, y) = ax^3 + bx^4 + cy^3 + dy^4$ रूप के बहुपदों का उपयोग करते हुए, a, b, c, d का मान निर्धारित कीजिये और

- (i) t के फलन के रूप में पेड़ पर फलों की कुल संख्या निर्धारित कीजिये।
- (ii) पिछले 5 वर्षों में पेड़ पर फलों की औसत संख्या कितनी थी?

(ख) एक फर्म पशु प्रजनन के कार्य में लगी हुई है। पशुओं को प्रतिदिन पोषण पूरक दिए जाने हैं। तीन आवश्यक पोषक तत्वों वाले दो उत्पाद हैं, 1 और 2, जिनमें प्रति किलोग्राम निम्नलिखित मात्र में पोषक तत्व हैं:-

उत्पाद	पोषक तत्व A	पोषक तत्व B	पोषक तत्व C
1	72	6	40
2	12	24	20

प्रत्येक पोषक तत्व की न्यूनतम आवश्यकता A: 216, B: 72, C: 200 है। उत्पाद 1 और 2 की कीमत क्रमशः 40 रुपये और 80 रुपये है। एक रैखिक प्रोग्रामिंग समस्या (Linear Programming problem) स्थापित कीजिये और न्यूनतम आवश्यक पोषण प्रदान करने के लिए दिए जाने वाले उत्पाद 1 और 2 की न्यूनतम लागत वाला संयोजन ज्ञात कीजिये।

- (क) मान लीजिए $F(x, y)$ को \mathbb{R}_+^2 पर परिभाषित किया गया है। दर्शाइए कि यदि F रैखिकतः समरूप (linearly homogeneous) है, तो स्तर वक्रों (level curves) की ढलान (slopes) किसी भी किरण $y=cx$ के अनुदिश समान होती है।

(ख) निम्नलिखित समीकरण प्रणाली दी गई है:

$$3x^2z + 6wy^2 - 2z + 1 = 0$$

$$xz - 4\frac{y}{z} - 3w - z = 0$$

w को बहिर्जात चर (exogenous variable) के रूप में लेते हुए, जाँच कीजिये कि क्या अंतर्निहित फलन प्रमेय (implicit function theorem) लागू होता है, और $\frac{\partial x}{\partial z}$ and $\frac{\partial y}{\partial z}$ at $(x, y, z, w) = (1, 2, -1, 0)$ और $(x, y, z, w) = (1, \frac{1}{2}, 2, -2)$ का मूल्यांकन कीजिये।

(7+8)

3. (a) Find the solution to the following differential

$$\text{equation: } t\dot{x} + 2x(t) = t^2 - t + 1, \text{ where } x(1) = \frac{1}{2}.$$

- (b) The output of a good is $x^a y$, where x, y are the amount of inputs and $a > 1$ is a parameter. A firm wants to maximise output subject to meeting the constraint $2x + y = 12$. Solve the firm's problem and get the optimal output. How does the maximum output change as the parameter a varies? (8+7)

- (क) निम्नलिखित अंतर समीकरण (differential equation) का हल

ज्ञात कीजिए: $t\dot{x} + 2x(t) = t^2 - t + 1$, जहाँ $x(1) = \frac{1}{2}$ है।

- (ख) किसी वस्तु का आउटपुट $x^a y$ है, जहाँ x, y इनपुट की मात्रा है और $a > 1$ एक पैरामीटर है। एक फर्म बाधा (constraint) $2x + y = 12$ को पूरा करने के विषयाधीन आउटपुट को अधिकतम करना चाहती है। फर्म की समस्या का समाधान बताइए और इष्टतम आउटपुट प्राप्त कीजिये। पैरामीटर a के बदलने पर अधिकतम आउटपुट किस प्रकार बदलता है?

4. (a) Starting with a single fruit, fruits are growing on a tree at the rate of:

$$f'(t) = -2t^2 + 10t + 100, \text{ for } t \in [0, 5] \text{ years.}$$

- (i) Determine the total number of fruits on the tree as a function of t .

- (ii) Over the 5 years, what was the average number of fruits on the tree?

- (b) A firm is engaged in animal breeding. The animals are to be given nutrition supplements everyday. There are two products, 1 and 2, which contain the three required nutrients per kg in the following way:

Product	Nutrient A	Nutrient B	Nutrient C
1	72	6	40
2	12	24	20

The minimum requirement of each nutrient is A: 216, B: 72, C: 200. The price of products 1 and 2 is Rs. 40 and Rs. 80, respectively. Set up a Linear Programming problem and find the least cost combination of products 1 & 2 to be given to provide the minimum nutritional requirement. (7+8)

- (क) एक फल से शुरूआत करके, किसी पेड़ पर निम्नलिखित दर से फल बढ़ते हैं:

$$f'(t) = -2t^2 + 10t + 100, \text{ for } t \in [0, 5] \text{ years.}$$