(क) उपरोक्त समस्या के दोहराव (dual) को तैयार कीजिए।

(ख) यदि $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ प्राइमल समस्या [1] में संभव है और $(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m)$ दोहराव (dual) समस्या [2] में संभव है, तो यह दर्शाएं

$$b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots\ldots + b_mu_m \geq c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

[This question paper contains 16 printed pages.]

Your Roll No..............

Sr. No. of Question Paper : 1767 **I**

Unique Paper Code : 2272102303

Name of the Paper : Advanced Mathematical Methods for Economics

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics**

Semester : III, DSC

Duration : 3 Hours Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. The use of a simple calculator is allowed.
3. Questions specified for the PWD category must be attempted by them only and not by the general category.
4. Attempt any **nine** questions.
5. **All** questions carry equal marks.
6. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

P.T.O.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. साधारण कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।
3. दिव्यांग श्रेणी के लिए निर्दिष्ट प्रश्नों को केवल दिव्यांग श्रेणी के लोगों द्वारा ही हल किया जाना चाहिए, सामान्य श्रेणी के लोगों द्वारा नहीं।
4. कोई भी नौ प्रश्न हल करें।
5. सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
6. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

1. Maximize Profits : $\pi = 64x - 2x^2 + 96y - 4y^2 - 13$ subject to the production constraint: $x + y \leq 36$

   लाभ अधिकतमकरण: $\pi = 64x - 2x^2 + 96y - 4y^2 - 13$ उत्पादन बाधा: $x + y \leq 36$ के अधीन होते हैं।

2. Suppose that an economy's investment flow every year is $I(t) = 10t^{\frac{1}{2}}$. Let $K(t)$ represent the current stock of capital at time t. If $K(0) = K_0$ and there is

(क) z को एक निश्चित संख्या मानते हुए, $z = 0$ और $z = 4$ के लिए प्रश्न को हल कीजिए।

(ख) $z \in [0, \infty)$ के किसी भी निश्चित मान के लिए प्रश्न को हल कीजिए। मानदंड फलन $3x + 2y$ का अधिकतम मान z का फलन बन जाता है। इस फलन को ज्ञात कीजिए और इसे अधिकतम बनाएं।

निःशक्तजन (PWD) अभ्यर्थियों के लिए वैकल्पिक प्रश्न

सामान्य LP समस्या पर विचार कीजिए

$$\max\ c_1x_1 + c_2x_2 + + c_nx_n$$

$$\text{subject to} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right. \qquad [1]$$

गैर-नकारात्मकता बाधाओं $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots,\ x_n \geq 0$ के साथ।

subject to $\left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right.$ [1]

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \le b_m$$

with non-negativity constraints $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$.

(a) Formulate the dual of the above problem.

(b) If $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ is feasible in the primal problem [1] and $(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m)$ is feasible in the dual problem [2], then show that

$$b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots\ldots + b_mu_m \ge c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

LP समस्या पर विचार कीजिए

$$x + y \le 3$$

$$2x + y - z \le 1$$

max $3x + 2y$, $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z \le 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ z \ge 0 \end{array} \right.$ के अधीन है

no depreciation, find the level of capital stock five years from now. What happens to the capital stock after five years if investment flow is the same as before and capital stock depreciates every year by 500?

मान लीजिए कि किसी अर्थव्यवस्था का निवेश प्रवाह प्रति वर्ष $I(t) = 10t^{\frac{1}{2}}$ है। मान लीजिए $K(t)$ समय t पर पूँजी के वर्तमान स्टॉक को दर्शाता हैं। यदि $K(0) = K_0$ है और कोई भी मूल्यह्रास नहीं होता है, तो अब से पाँच वर्ष बाद पूँजी स्टॉक का स्तर ज्ञात कीजिए। पांच वर्षों के बाद पूंजी स्टॉक का क्या होगा यदि निवेश प्रवाह पहले के समान है और पूंजी स्टॉक प्रति वर्ष 500 से कम हो जाता है?

3. (a) Show that $u_1 = e^{2t}$ and $u_2 = te^{2t}$ both solve the $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$. What is the general solution?

(b) Find the general solutions of the following differential equation and determine if it is stable or not :

$$\dot{y} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$

(क) यह दर्शाएं कि $u_1 = e^{2t}$ और $u_2 = te^{2t}$ दोनों $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$ को हल करते हैं। इसका सामान्य हल क्या है?

(ख) निम्नलिखित अवकल समीकरण के सामान्य हल खोजिए और ज्ञात कीजिए कि यह स्थिर है या नहीं :

$$\dot{y} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$

4. Two firms share the market for a product. Firm 1's output is x; firm 2's output is y. The two reaction functions of the firms are

$$x_{t+1} + \beta y_t = b; \qquad \beta \neq 1$$

$$y_{t+1} + \alpha x_t = b; \qquad \alpha \neq 1$$

Derive and solve the second-order difference equation for x implied by the above model. Also, discuss the conditions under which the steady state is stable.

दो फर्म एक उत्पाद के लिए बाजार साझा करती हैं। फर्म 1 का आउटपुट x है; फर्म 2 का आउटपुट y है। फर्मों के दो प्रतिक्रिया फलन हैं

$$x_{t+1} + \beta y_t = b; \qquad \beta \neq 1$$

$$y_{t+1} + \alpha x_t = b; \qquad \alpha \neq 1$$

10. Consider the LP problem

$$x + y \leq 3$$

$$2x + y - z \leq 1$$

$$\max\ 3x + 2y \text{ subject to } \begin{cases} x + 2y - z \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases},$$

(a) Assuming z to be a fixed number, solve the problem for $z = 0$ and $z = 4$.

(b) Solve the problem for any fixed-value of $z \in [0, \infty)$. The maximal value of the criterion function $3x + 2y$ becomes a function of z. Find this function and maximise it.

Alternative Question for the PWD Candidates

Consider the general LP problem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\max\ c_1x_1 + c_2x_2 + + c_nx_n.$$

(b) Solve the producer's problem by writing Kuhn-tucker conditions for maximising producer's total profit and find the optimal output quantities q_1 and q_2, and capacity level k.

एक विद्युत कंपनी एक विद्युत संयंत्र स्थापित कर रही है और उसे अपनी क्षमता की योजना बनानी होगी। अवधि 1 और अवधि 2 में विद्युत की माँग क्रमश: q_1 और q_2 है। मान लीजिए कि एक नियामक प्राधिकरण अवधि 1 और अवधि 2 के लिए संबंधित मूल्य क्रमश: 1 रुपये प्रति यूनिट और 3 रुपये प्रति यूनिट तय करता है। दो अवधियों में कुल परिचालन लागत $q_1^2 + q_2^2$ है। आउटपुट क्षमता k लागत को बनाए रखने की लागत k^2 है जिसका भुगतान केवल एक बार किया जाता है और दोनों अवधियों में उपयोग किया जाता है।

(क) उत्पादक के कुल लाभ फलन को सभी बाधाओं के साथ लिखिए।

(ख) उत्पादक के कुल लाभ को अधिकतम करने के लिए कुह्न-टकर शर्तों को लिखकर उत्पादक की समस्या का समाधान कीजिए और इष्टतम उत्पादन मात्रा q_1 और q_2 और क्षमता स्तर k ज्ञात कीजिए।

उपरोक्त मॉडल द्वारा निहित x के लिए दूसरे क्रम के अवकंल समीकरण को प्राप्त और हल कीजिए। इसके अलावा, उन स्थितियों पर चर्चा कीजिए जिनके तहत स्थायी अवस्था स्थिर है।

5. Solve the consumer demand problem

max $x^a + y^a$ subject to $px + qy = m$ where $a \in (0,1)$ and $x > 0$, $y > 0$

Also, check the second order sufficient conditions.

उपभोक्ता मांग समस्या का समाधान कीजिए

max $x^a + y^a$, $px + qy = m$ के अधीन है जहां $a \in (0,1)$ और $x > 0$, $y > 0$ हैं

इसके अलावा, दूसरे क्रम की सत्यता स्थितियों की जांच कीजिए।

6. A central planner controls an economy with two sectors, producing outputs y_1 and y_2. Prices of the goods are $p_1 = 1$ and $p_2 = 2$ respectively. The planner wishes to maximise the national output at these given prices. Labour is the only input and it is available in a fixed total amount $L_0 = 1000$. The production functions in the two sectors are

$$y_1 = 100L_1^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad y_2 = 50L_2^{\frac{1}{2}}$$

(a) Calculate the optimal labour allocations, outputs and the shadow wage rate.

(b) Write the value function and Find $\frac{\partial Y^*}{\partial p_1}$, $\frac{\partial Y^*}{\partial p_2}$ and, $\frac{\partial Y^*}{\partial L_0}$ using the envelope theorem.

एक केंद्रीय योजनाकार दो क्षेत्रों के साथ एक अर्थव्यवस्था को नियंत्रित करता है, वह y_1 और y_2 आउटपुट का उत्पादन करता है। वस्तुओं की कीमतें क्रमशः $p_1 = 1$ और $p_2 = 2$ हैं। योजनाकार इन दी गई कीमतों पर राष्ट्रीय उत्पादन को अधिकतम करना चाहता है। श्रम एकमात्र इनपुट है और यह एक निश्चित कुल मात्रा $L_0 = 1000$ में उपलब्ध है। दोनों क्षेत्रों के उत्पादन फलन हैं

$$y_1 = 100L_1^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad y_2 = 50L_2^{\frac{1}{2}}$$

(क) इष्टतम श्रम आवंटन, आउटपुट और कल्पित मजदूरी दर की गणना कीजिए।

(ख) मान फलन लिखिए और अन्वालोप प्रमेय का उपयोग करके $\frac{\partial Y^*}{\partial p_1}$, $\frac{\partial Y^*}{\partial p_2}$ और $\frac{\partial Y^*}{\partial L_0}$ ज्ञात कीजिए।

में परिवर्तन को दिखाने के लिए चरण आरेख बनाएं और स्थिर स्थितियों की प्रकृति पर चर्चा कीजिए।

निःशक्तजन (PWD) अभ्यर्थियों के लिए वैकल्पिक प्रश्न

$y(t)$ के लिए अवकल समीकरण को हल कीजिए जहां

$$\frac{dy}{dt} = ty + 2 - 2t - y$$

साथ ही बिंदु (0,1) के माध्यम से समाकल वक्र ज्ञात कीजिए।

9. An electric company is setting up a power plant and it has to plan its capacity. The demand for power in period 1 and period 2 are q_1 and q_2 respectively. Assume that a regulatory authority fixes the corresponding prices for period 1 and period 2 to be Rs. 1 per unit and Rs. 3 per unit respectively. The total operating cost over the two periods is $q_1^2 + q_2^2$. The cost of maintaining output capacity k cost is k^2 which is paid only once and is used in both periods.

(a) Write the producer's total profit function with all constraints.

8. Suppose that a fish population grows according to the function, $g(y)=2y\left(1-\frac{y}{2}\right)$ where y is the stock of fish. If the fish population is harvested by the fishing industry at a constant rate of ¾, write down the equation for the rate of change in the stock of fish. Also, draw the phase diagram to show the change in the stock of the population as a function of the stock of fish and discuss the nature of the steady states.

Alternative Question for the PWD Candidates

Solve the differential equation for y(t) where

$$\frac{dy}{dt}=ty+2-2t-y$$

Also, find the integral curve through the point (0,1).

मान लीजिए कि मछली की आबादी फलन $g(y)=2y\left(1-\frac{y}{2}\right)$ के अनुसार बढ़ती है, जहाँ y मछली का स्टॉक है। यदि मत्स्य उद्योग द्वारा मछली की जनसंख्या को ¾, की स्थिर दर से पकड़ा जाता है, तो मछली के स्टॉक में परिवर्तन की दर के लिए समीकरण लिखिए। इसके अलावा, मछली के स्टॉक के एक फ़लन के रूप में जनसंख्या के स्टॉक

7. A sports student is trying to decide on the lowest-cost diet. Following is the data for two types of eatables (sprouts and Banana) and three types of nutrients (Calcium, protein and Vitamin)

	Nutritional Content (mg/ unit)			Cost (Rs Per Unit)
	Calcium	Protein	Vitamin	
Sprouts	5	4	2	6
Banana	7	2	1	3.5

The requirement per day of calcium, proteins and vitamins is 8, 15 and 3 respectively. The problem is to find how much of each eatable to consume per day to get the required amount per day of each nutrient at a minimal cost.

(a) Write the linear programming problem and its dual and solve them.

(b) If the sports coach increases the calcium requirement from 8 to 9 and reduces the protein requirement from 15 to 14, then what will be the change in the cost?

Alternative Question for the PWD Candidates

(a) Write the dual of the following Problem

$$\max x_1 + x_2 + x_3 \text{ subject to } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_3 \le 6 \end{cases}.$$

(b) What are the solutions to this problem and the dual? What happens to the primal criterion function if the constraints in the primal change to

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4.1 \\ x_3 \le 5.9 \end{cases}?$$

एक खेल छात्र सबसे कम लागत वाले आहार पर निर्णय लेने की कोशिश कर रहा है। दो प्रकार के खाद्य पदार्थों (अंकुरित अनाज और केला) और तीन प्रकार के पोषक तत्वों (कैल्शियम, प्रोटीन और विटामिन) के आंकड़े निम्नलिखित हैं

	पोषक तत्व (mg/ unit)			लागत (प्रति यूनिट रुपये)
	कैल्शियम	प्रोटीन	विटामिन	
अंकुरित अनाज	5	4	2	6
केला	7	2	1	3.5

कैल्शियम, प्रोटीन और विटामिन की प्रति दिन आवश्यकता क्रमश: 8, 15 और 3 है। समस्या यह पता लगाना है कि न्यूनतम लागत पर प्रत्येक पोषक तत्व की प्रति दिन आवश्यक मात्रा प्राप्त करने के लिए प्रति दिन प्रत्येक आहार का कितना उपभोग करना है।

(क) रैखिक प्रोग्रामिंग समस्या और उसकी दोहरी समस्या को लिखिए और उन्हें हल कीजिए।

(ख) यदि स्पोर्ट्स कोच कैल्शियम की आवश्यकता को 8 से बढ़ाकर 9 कर देता है और प्रोटीन की आवश्यकता को 15 से घटाकर 14 कर देता है, तो लागत में क्या बदलाव होगा?

निःशक्तजन (PWD) अभ्यर्थियों के लिए वैकल्पिक प्रश्न

(क) निम्नलिखित समस्या का दोहराव (dual) लिखिए

$$\max x_1 + x_2 + x_3 \text{ subject to } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_3 \le 6 \end{cases}$$ के अधीन

(ख) इस समस्या और दोहरे का समाधान क्या है? यदि प्राइमल में बाधाएं $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4.1 \\ x_3 \le 5.9 \end{cases}$ में बदल जाती हैं तो प्राइमल मानदंड फलन का क्या होता है?