

(क) दो वस्तुओं  $u = Q_1Q_2$  (आभूषण और गैजेट) के लिए किसी व्यक्ति के उपयोगिता फलन पर विचार कीजिए जहाँ  $Q_1$  आभूषणों की इकाइयाँ और  $Q_2$  गैजेट्स की इकाइयाँ हैं। जब  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 4$  हो और उसका बजट हो  $B = 120$  तो उसकी उपयोगिता को अधिकतम कीजिए।

(ख) दी गयी सीमा (limit) का मूल्यांकन कीजिए :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-8}{x^2-64}$

[This question paper contains 20 printed pages.]

Your Roll No.....

Sr. No. of Question Paper : 2375

I

Unique Paper Code : 2272202302

Name of the Paper : Optimization Methods for  
Economic Analysis

Name of the Course : B.A. with Economics  
DSC

Semester : III

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 90

### Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Attempt any 9 questions.
3. Each question carries 10 marks.
4. Use of a simple non-programmable calculator is allowed.
5. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. किन्हीं 9 प्रश्नों के उत्तर दें।
3. प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।
4. साधारण गैर-प्रोग्रामिय कैलकुलेटर उपयोग की अनुमति है।
5. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

1. (a) Calculate  $\frac{dy}{dv}$  for the function  $y = f(v) = (v^2 + 10v - 8)^{214}$ .

- (b) Consider the demand function for pens in a country:  $Q = 75 - P^2$ , where  $Q$  is the quantity demanded, and  $P$  is the price per unit. Find the price elasticity of demand for pens when the price of a pen is Rs. 7.5. (5,5)

- (ख) आउटपुट स्तर  $Q = 2144$  पर आइसोक्वेंट (isoquant) के लिए समीकरण  $16K^{1/4}L^{3/4} = 2144$  पर विचार कीजिए।

- (i) इस आइसोक्वेंट का ढलान (slope) ज्ञात करने के लिए अंतर्निहित विभेदन (implicit differentiation) का उपयोग कीजिए।

- (ii)  $K = 256, L = 108$  पर तकनीकी प्रतिस्थापन की सीमांत दर (एमआरटीएस) का मूल्यांकन कीजिए। इस संख्यात्मक मान का आर्थिक अर्थ समझाएँ।

10. (a) Consider a person's utility function for two goods (jewellery and gadgets)  $u = Q_1Q_2$  where  $Q_1$  is the units of jewellery and  $Q_2$  as units of gadgets. Maximise her utility when  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 4$  and her budget is  $B = 120$ .

- (b) Evaluate the following limit:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-8}{x^2-64}$ . (6,4)

(b) Consider the equation  $16K^{1/4}L^{3/4} = 2144$  for an isoquant at output level  $Q = 2144$

(i) Use implicit differentiation to find the slope of this isoquant

(ii) Evaluate marginal rate of technical substitution (MRTS) at  $K = 256, L = 108$   
Explain the economic meaning of this numerical value. (6,4)

(क) एक महिला अपने रेस्तरां में दो आइटम, पिज्जा (x) और आइसक्रीम (y) बेचती है। यदि उसे अपने लाभ अधिकतम करना हो, तो उसके रेस्तरां को क्या आउटपुट मिक्स उत्पादित करना चाहिए, जबकि कुल लाभ फलन  $\pi = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$  दिया गया हो और उसके समक्ष आने वाली बाधा  $x + y = 12$  हो? यदि आउटपुट क्षमता 1 इकाई तक बढ़ाई जाए, तो लाभ पर प्रभाव का अनुमान लगाइए।

(क) फलन  $y = f(v) = (v^2 + 10v - 8)^{2/14}$  के लिए  $\frac{dy}{dv}$  की गणना

कीजिए।

(ख) किसी देश में पेन की मांग के फलन (demand function) पर विचार कीजिए :  $Q = 75 - P^2$  जहाँ Q माँग की गई मात्रा है, और P प्रति इकाई कीमत है। यदि एक पेन की कीमत 7.5 रुपये है, तो पेन की माँग की कीमत लोच (price elasticity) ज्ञात कीजिए।

2. Consider an open-economy National Income Model represented by the following equations :

$$Y - C(Y_d) - I(r) - G_0 - X(E) + M(Y, E) = 0$$

$$X(E) - M(Y, E) + K(r, r_w) = 0$$

$$L(Y, r) - M_{s_0} = 0$$

where  $Y = \text{Income}$ ,

$C(Y_d) = \text{Consumption as a function of disposable income}$

$Y_d = \text{Disposable income} = Y - T(Y)$



$I(r)$  = Investment spending;  $I'(r) < 0$

$T(Y)$  = Taxes as a function of income;  $T' > 0$

$G_0$  = Government spending

$X(E)$  = Net exports as a function of exchange rate

$X'(E) > 0$

$M(Y, E)$  = Import demand ( $M_Y > 0$  and  $M_E < 0$ )

$L(Y, r)$  = Money demand as a function of income and domestic interest rate  $r$

$L_Y > 0$  and  $L_r < 0$

$M_{S_0}$  = Money supply in this economy

$X(r, r_w)$  = Capital inflows as a function of domestic and world interest rates,  $r$  and  $r_w$

$K_r > 0$  and  $K_{r_w} < 0$

(a) Demonstrate whether the implicit function rule is applicable here.

एक स्विस् फर्म दो सामान, चाकू ( $x$ ) और घड़ियाँ ( $y$ ) बनाती है। इसका लाभ फलन निम्नानुसार दिया गया है :

$$\pi = 25x - x^2 - xy - 2y^2 + 30y - 28,$$

(क) चाकू और घड़ियों के उत्पादन के किस स्तर पर लाभ फलन स्थिर (stationary) रहता है?

(ख) द्वितीय क्रम की स्थिति (2nd order condition) का परीक्षण कीजिए और इस फर्म के लिए अधिकतम लाभ का मूल्यांकन कीजिए।

9. (a) A person sells two items in her restaurant: pizza ( $x$ ) and ice cream ( $y$ ). If she wants to maximise her profits, what output mix should her restaurant produce when the total profit function is given by  $\pi = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$  and the constraint faced is  $x + y = 12$ ? Estimate the effect on profits if output capacity is expanded by 1 unit.

(ख) निम्न फलन पर विचार कीजिए  $g(v) = v^6 + 10$ .

(i) इसका स्थिर (क्रांतिक) (stationary (critical)) मान ज्ञात कीजिए।

(ii) यह निर्धारित करने के लिए कि यह सापेक्ष अधिकतम (relative maxima), सापेक्ष न्यूनतम (relative minima) या विभक्ति बिंदु (inflection point) को दर्शाता है  $N^{\text{th}}$  व्युत्पन्न परीक्षण (derivative test) का उपयोग कीजिए।

8. A Swiss firm produces two goods, knives (x) and watches (y). Its profit function is given by:

$$\pi = 25x - x^2 - xy - 2y^2 + 30y - 28,$$

(a) At what levels of production of knives and watches is the profit function stationary?

(b) Test the 2<sup>nd</sup> order condition for profit maximisation and evaluate the maximum profits for this firm.

(4,6)

(b) Analyse the direction of change in the equilibrium income and exchange rate in the presence of money supply changes. (5,5)

निम्नलिखित समीकरणों द्वारा निरूपित किए गए खुली अर्थव्यवस्था वाले राष्ट्रीय आय मॉडल (National Income Model) पर विचार कीजिए :

$$Y - C(Y_d) - I(r) - G_0 - X(E) + M(Y, E) = 0$$

$$X(E) - M(Y, E) + K(r, r_w) = 0$$

$$L(Y, r) - M_{S_0} = 0$$

जहाँ  $Y$  = आय है,

$C(Y_d)$  = प्रयोज्य आय के फलन के रूप में उपभोग है,

$$Y_d = \text{प्रयोज्य आय} = Y - T(Y)$$

$$I(r) = \text{निवेश व्यय} \quad I'(r) < 0$$

$$T(Y) = \text{आय के फलन के रूप में कर; } T' > 0$$

$$G_0 = \text{सरकारी खर्च}$$

$X(E)$  = विनिमय दर के फलन के रूप में शुद्ध निर्यात,  $X'(E) > 0$

$M(Y, E)$  = आयात मांग ( $M_Y > 0$  और  $M_E < 0$ )

$L(Y, r)$  = आय के फलन (function) के रूप में धन की मांग और घरेलू ब्याज दर  $r$

$$L_Y > 0 \text{ and } L_r < 0$$

$M_{S_0}$  = इस अर्थव्यवस्था में धन आपूर्ति

$X(r, r_w)$  = घरेलू और वैश्विक ब्याज दर के फलन के रूप में पूंजी अंतर्वाह (Capital inflows),  $r$  और  $K_r > 0$  and  $K_{rw} < 0$

(क) दर्शाइए कि क्या अंतर्निहित फलन (implicit function) नियम यहां लागू होता है।

(ख) धन आपूर्ति परिवर्तनों (money supply changes) की उपस्थिति में संतुलन आय (equilibrium income) और विनिमय दर में परिवर्तन की दिशा का विश्लेषण कीजिए।

(ii) Use  $N^{\text{th}}$  derivative test to determine whether it represents relative maxima, relative minima or inflection point. (4,6)

(क) निम्नलिखित राष्ट्रीय आय मॉडल पर विचार कीजिए :

$$Y = C + I_0 + G_0 + (X_0 - M)$$

$$C = a + c(Y - T) \quad a > 0, \quad 0 < c < 1$$

$$T = tY, \quad 0 < t < 1 \text{ और } M = mY, \quad 0 < m < 1$$

जहाँ  $Y$  राष्ट्रीय आय है,  $C$  (नियोजित) उपभोग व्यय  $I_0$  निवेश व्यय है,  $G_0$  सरकारी व्यय है,  $X_0$  निर्यात है,  $M$  आयात है और  $T$  कर है।

(i) संतुलन आय (equilibrium income)  $Y^*$  ज्ञात कीजिए।

(ii) सरकारी व्यय के संबंध में तुलनात्मक स्थैतिक परिणामों (comparative static results) की जाँच कीजिए।  
इसके आर्थिक अर्थ और संकेत (economic meaning and sign) की व्याख्या कीजिए।



7. (a) Consider the national income model:

$$Y = C + I_0 + G_0 + (X_0 - M)$$

$$C = a + c(Y - T) \quad a > 0, \quad 0 < c < 1$$

$$T = tY, \quad 0 < t < 1 \quad \text{and} \quad M = mY, \quad 0 < m < 1$$

where  $Y$  is national income,  $C$  is (planned) consumption expenditure,  $I_0$  is investment expenditure,  $G_0$  is government expenditure,  $X_0$  is exports,  $M$  is imports, and  $T$  is taxes.

(i) Derive the equilibrium income  $Y^*$ .

(ii) Examine the comparative static results with respect to government expenditure

Interpret its economic meaning and sign.

(b) Consider the function  $g(v) = v^6 + 10$ .

(i) Find its stationary (critical) value.

3. (a) Assume a production function  $Q = f(X_1, X_2)$  is implicitly defined by the equation  $G(Q, X_1, X_2) = 0$  where  $X_1$  and  $X_2$  represent the quantity of two

inputs. Find the expressions for  $\frac{\partial Q}{\partial X_1}$  and  $\frac{\partial Q}{\partial X_2}$ .

What are their economic meanings?

(b) Consider the following function :

$$y = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{if } 2 \leq x < 4 \\ 6 & \text{if } 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

For the interval  $x \in (0, 6)$  discuss at what points the function is discontinuous. (6,4)

(क) मान लीजिए कि उत्पादन फलन  $Q = f(X_1, X_2)$  समीकरण

$G(Q, X_1, X_2) = 0$  द्वारा अंतर्निहित रूप से परिभाषित है जहाँ और

दो इनपुट की मात्रा को दर्शाते हैं। अभिव्यंजना  $\frac{\partial Q}{\partial X_1}$  और  $\frac{\partial Q}{\partial X_2}$

(expressions) ज्ञात कीजिए। इनके आर्थिक अर्थ क्या हैं?

(ख) निम्नलिखित फलन पर विचार कीजिए :

$$y = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{if } 2 \leq x < 4 \\ 6 & \text{if } 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

अंतराल  $x \in (0,6)$  के लिए चर्चा कीजिए कि कौन से बिंदुओं पर फलन असतत (discontinuous) है।

4. (a) Consider a price-discriminating monopolist who supplies to three distinct markets. Its total cost function is given by  $C = 30 + 15Q$ , where  $C$  is the cost incurred, and  $Q$  is the total output produced by it. It faces the following demands in the three markets:

6. (a) Consider the function  $g(v) = (v - 2)^4$ . Find its stationary (critical) value. Use  $N^{\text{th}}$  derivative test to determine whether it represents relative maxima, relative minima or inflection point.

- (b) If production function  $Q = f(L, K)$  is linear homogeneous, then prove Euler's Theorem for this function. (5,5)

(क) फलन  $g(v) = (v - 2)^4$  पर विचार कीजिए। इसका स्थिर (क्रांतिक) (stationary (critical)) मान ज्ञात कीजिए। यह निर्धारित करने के लिए कि यह सापेक्ष अधिकतम (relative maxima), सापेक्ष न्यूनतम (relative minima) या विभक्ति बिंदु (inflection point) को दर्शाता है व्युत्पन्न परीक्षण (derivative test) का उपयोग कीजिए।

(ख) यदि उत्पादन फलन  $Q = f(L, K)$  रैखिक समरूप (linear homogeneous) है, तो इस फलन के लिए यूलर के प्रमेय (Euler's Theorem) को सिद्ध कीजिए।



$C = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 211Q + 500$  तथा  $= 200 - P$ , जहाँ  $C$  कुल लागत है,  $Q$  आउटपुट है, तथा  $P$  कीमत है। इसके उत्पादन का अधिकतम लाभ प्राप्त करने का (profit maximising level) स्तर ज्ञात कीजिए।

- (ख) फिटनेस के प्रति जागरूक छात्रा प्रोटीन शेक और जिम सप्लीमेंट दोनों का सेवन करता है। प्रोटीन शेक ( $c_1$ ) की कीमत ₹1000 प्रति टब है, और जिम सप्लीमेंट ( $c_2$ ) की कीमत ₹2000 प्रति पैक है। और उसका भत्ता ₹60000 है। कॉब-डगलस फलन (Cobb-Douglas function) उसकी उपयोगिता को निम्नानुसार दर्शाता है :

$$U = c_1^{1/4} c_2^{3/4}$$

- (i) उसकी बजट रेखा (budget line) के लिए समीकरण (equation) लिखिए।

- (ii) यदि प्रोटीन शेक की कीमत बढ़कर ₹2000 हो जाती है तो बजट रेखा पर पड़ने वाले प्रभाव को ग्राफ द्वारा दर्शाइए।

$$P_1 = 65 - 5Q_1, P_2 = 95 - 10Q_2 \text{ and } P_3 = 87 - 6Q_3$$

Upon profit maximisation, find the prices charged and the quantities supplied in the three markets. Which market has the lowest and highest price elasticity of demand?

- (b) Find the first order partial derivatives of following

$$\text{function : } z = f(u, v) = \frac{4u - 9v}{5u + 2v} \quad (7.3)$$

- (क) मूल्य-भेदभाव करने वाली एकाधिकारवादी कंपनी पर विचार कीजिए जो तीन अलग-अलग बाजारों में आपूर्ति करती है। इसका कुल लागत फलन  $C = 30 + 15Q$  द्वारा दिया गया है, जहाँ  $C$  वहन की गई लागत है, और  $Q$  उसके द्वारा उत्पादित कुल आउटपुट है। इसको तीन बाजारों में निम्नानुसार माँग मिलती है :

$$P_1 = 65 - 5Q_1, P_2 = 95 - 10Q_2 \text{ and } P_3 = 87 - 6Q_3$$

अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए, तीनों बाजारों में लगाए गए मूल्य और आपूर्ति की मात्रा ज्ञात कीजिए। किस बाजार में मांग की कीमत लोच (price elasticity of demand) न्यूनतम और सर्वाधिक है?

(ख) निम्नलिखित फलन का प्रथम क्रम आंशिक व्युत्पन्न (first order partial derivatives) ज्ञात कीजिए :

$$z = f(u, v) = \frac{4u - 9v}{5u + 2v}$$

5. (a) A guitar manufacturing firm has total cost function and demand function given by :

$$C = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 211Q + 500 \text{ and } P = 200 - P,$$

where C is the total cost, Q is the output, and P is the price. Find its profit-maximising level of output.

(b) A fitness-conscious student consumes both protein shakes and gym supplements. The price of protein shakes ( $c_1$ ) is ₹1000 per tub, and the price of gym supplements ( $c_2$ ) is ₹2000 per pack. And her allowance is ₹60000. The Cobb-Douglas function represents her utility:

$$U = c_1^{1/4} c_2^{3/4}$$

(i) Write down the equation for her budget line.

(ii) Graphically show what happens to the budget line if the price of protein shakes increases to ₹2000. (5,5)

(क) गिटार का निर्माण करने वाली एक फर्म का कुल लागत फलन और मांग फलन इस प्रकार है :