(क) आरेख खींचकर (या सटीक बीजगणितीय तर्क बनाकर), यह निर्धारित करें कि निम्नलिखित सेट उत्तल है या नहीं।

$$\{(x, y): y \geq e^x\}$$

(ख) मामले के लिए श्रम और पूंजी के उपयोग को अधिकतम करने वाली प्रतिस्पर्धी फर्म के लाभ को हल करें, जहां,

$Y = L^{0.2}K^{0.6}$, $p = 100$, $w = 10$, और $r = 20$

K, L और π के इष्टतम मान ज्ञात कीजिए। यह भी दर्शाइए कि हल सत्य अधिकतम है।

[This question paper contains 20 printed pages.]

Your Roll No..............

Sr. No. of Question Paper : 1327 **F**

Unique Paper Code : 2272101202

Name of the Paper : Intermediate Mathematical Methods for Economics

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics**

Semester / Type : II / DSC

Duration : 3 Hours Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. This question paper is divided into **three** sections.
3. Use of simple calculator is allowed.
4. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।

2. यह प्रश्न पत्र तीन खण्डों में विभाजित है ।

3. साधारण कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति है ।

4. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

SECTION A

Attempt **any five** of the following questions. (5×8=40)

निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

1. (a) A firm sells 2 brands X and 7 of a soap. The outputs and prices are denoted by x, y and p, q respectively. The demand functions of the two brands are $x = 100 - 2p + 5q$ and $y = 80 + 4p - 3q$. Suppose brand X sells for 15/unit and Y for 12/unit. Calculate the total revenue of the firm. Estimate the approximate change in revenue if the prices are increased by 1/unit for X and 1.5/unit for Y and compare it with the actual change in revenue.

(b) Find the domain and plot it for the following function:

$$z = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-3}$$ (4+4)

(ख) ऑर्डर n के गैर-एकवचन मैट्रिक्स T पर विचार करें जैसे कि

$$T^3 - 2T^2 + T - I = O_{n\times n}\text{(null matrix)}$$

(i) उपरोक्त समीकरण का प्रयोग करें, साबित करें कि

$$T^{-1} = (T - I)^2.$$

(ii) दिखाएँ कि, अगर $A^2 = T$ तो $A = (T - I)^{-1}$ कुछ मैट्रिक्स A के लिए A.

13. (a) By drawing diagrams (or by making precise algebraic arguments), determine whether the following set is convex.

$$\{(x, y): y \geq e^x\}$$

(b) Solve the competitive firm's profit maximizing use of labour and capital for the case where,

$$Y = L^{0.2}K^{0.6},\ p = 100,\ w = 10,\ \text{and}\ r = 20.$$

Find the optimum values of K, L and π. Also, show that the solution is true maximum.

(3+7)

(b) Consider a non-singular matrix T of order n such that

$$T^3 - 2T^2 + T - I = O_{n\times n}\text{(null matrix)}$$

(i) Use the above equation, prove that $T^{-1} = (T - I)^2$.

(ii) Show that, if $A^2 = T$ then $A = (T - 7)^{-1}$ for some matrix A. (5+5)

(क) एक ऊपरी त्रिकोणीय मैट्रिक्स एक वर्ग मैट्रिक्स है यदि मुख्य विकर्ण के नीचे के सभी तत्व शून्य हैं। एक 3×3 ऊपरी त्रिकोणीय मैट्रिक्स ए पर विचार करें जिसके गैर-शून्य तत्व एक स्थिरांक के बराबर हैं।

(i) A^2 and A^3 खोजें और दिखाएं कि वे ऊपरी त्रिकोणीय मैट्रिक्स भी हैं।

(ii) प्रेरण द्वारा दिखाएँ कि A^n एक ऊपरी त्रिकोणीय मैट्रिक्स है और वह trace $(A^n) = 3a^n$ (जहा, ट्रेस सभी विकर्ण तत्वों का योग है)।

(क) एक फर्म एक साबुन के 2 ब्रांड X और Y बेचती है। आउटपुट और कीमतों को क्रमश: x, y और p, q द्वारा निरूपित किया जाता है। दो ब्रांडों के मांग फलन $x = 100 - 2p + 5q$ और $y = 80 + 4p - 3q$ हैं। मान लीजिए कि ब्रांड 1.5/यूनिट के लिए और Y 12/यूनिट के लिए बेचता है। फर्म के कुल राजस्व की गणना करें। राजस्व में अनुमानित परिवर्तन का अनुमान लगाएं यदि कीमतों में एक्स के लिए 1/यूनिट और वाई के लिए 1.5/यूनिट की वृद्धि होती है और राजस्व में वास्तविक परिवर्तन के साथ इसकी तुलना करें।

(ख) डोमेन खोजें और इसे निम्नलिखित फंक्शन के लिए प्लॉट करें:

$$z = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-3}$$

2. Suppose Firm X wishes to manufacture three SUVs in its plants at A and B using its labour force of L persons. Suppose the firm allocates the total labour force in the proportion a and $1 - \alpha$ $(0 \le \alpha \le 1)$ to the plants at A and that at B respectively and hence produces the total outputs of the three products (as measured in 100s of units) given by the vector

$$\alpha\begin{pmatrix}10\\4\\8\end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix}6\\10\\10\end{pmatrix}$$

Given the above information, answer the following questions :

(a) Is it possible for the firm to produce either of the following output vectors if outputs cannot be thrown away?

(i) $\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

(b) How do your answers to part (a) change if outputs can be thrown away?

(c) What will be the revenue maximizing choice of the fraction a and how will it depend upon the selling prices (p_1 p_2 p_3) of the three SUVs? What condition must be put on the prices so that both the plants are used by the firm? (3+1+4)

वर्तमान में x = 4, y = 1, T = 68 और H = –7 छात्रों के विरोध के डर से, प्रधानाचार्य H को –2 तक मामूली रूप से बढ़ाना चाहते हैं और T को घटाकर 63 करना चाहते हैं। x और y के मान निर्धारित करें जो प्रधानाचार्य को इस उद्देश्य को प्राप्त करने में मदद करेंगे।

(ख) क्या निम्नलिखित कार्य सजातीय हैं? यदि हाँ, तो समरूपता की मात्रा क्या है? यह भी जांचें कि क्या वे होमोथेटिक हैं।

(i) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

(ii) $g(x, y) = 2\ln x - \ln y$

12. (a) An upper triangular matrix is a square matrix if all the elements below the main diagonal are zeros. Consider a 3×3 upper triangular matrix A whose non-zero elements are equal to a constant a.

(i) Find out A^2 and A^3 and show that they are also upper triangular matrices.

(ii) Show by induction that A^n is an upper triangular matrix and that trace $(A^n) = 3a^n$ (where, trace is the sum of all the diagonal elements).

$$T = x^3 + xy^{1/2}$$

$$H = y^2 - 4x^{1/2}$$

Currently $x = 4$, $y = 1$, $T = 68$ and $H = -7$. Fearing student protests, the principal wants to moderately increase H to -2 and decrease T to 63. Determine the values of x and y that will help the principal achieve this objective.

(b) Are the following functions homogeneous? If yes, what is the degree of homogeneity? Also check if they are homothetic.

(i) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

(ii) $g(x, y) = 2\ln x - \ln y$ (5+5)

(क) एक कॉलेज के प्रिंसिपल का सही अनुमान है कि यदि छात्रों को x घंटे की कक्षा में भाग लेने और y घंटे की पाठ्येतर गतिविधियों को करने का निर्देश दिया जाता है, तो उन्हें का एक टेस्ट स्कोर मिलता है और H का छात्र खुशी स्तर प्राप्त होता है, जैसा कि निम्नलिखित संबंधों द्वारा दिया गया है :

$$T = x^3 + xy^{1/2}$$

$$H = y^2 - 4x^{1/2}$$

मान लीजिए कि फर्म X अपने L व्यक्तियों की श्रम शक्ति का उपयोग करके A और B में अपने संयंत्रों में तीन SUVs का निर्माण करना चाहती है। मान लीजिए कि फर्म क्रमशः A और B में फैक्टरियों को α और $1 - \alpha$ $(0 \le \alpha \le 1)$ के अनुपात में कुल श्रम बल आवंटित करती है और इसलिए तीन उत्पादों के कुल आउटपुट का उत्पादन करती है (जैसा कि 100 इकाइयों में मापा जाता है) वेक्टर द्वारा दिया गया

$$\alpha\begin{pmatrix}10\\4\\8\end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix}6\\10\\10\end{pmatrix}$$

उपरोक्त जानकारी को देखते हुए, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दें :

(क) क्या फर्म के लिए निम्नलिखित आउटपुट वैक्टर में से किसी एक का उत्पादन करना संभव है यदि आउटपुट को फेंका नहीं जा सकता है?

(i) $\begin{pmatrix}8\\7\\9\end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix}9\\7\\9\end{pmatrix}$

(ख) यदि आउटपुट को फेंका जा सकता है तो भाग (ए) के लिए आपके उत्तर कैसे बदलते हैं?

(ग) अंश α का राजस्व अधिकतम करने का विकल्प क्या होगा और यह तीन एसयूवी की बिक्री कीमतों (p_1 p_2 p_3) पर कैसे निर्भर करेगा? कीमतों पर क्या शर्त रखी जानी चाहिए ताकि फर्म द्वारा दोनों संयंत्रों का उपयोग किया जा सके?

3. (a) Compute the expression for $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial y^q \partial x^p}$ where $z = e^{x+y}(x+y)$.

(b) A production function is given by

$$Q(L,K) = A\left[\alpha L^{\rho} + (1-\alpha)K^{\rho}\right]^{\frac{v}{\rho}}$$

Determine its degree of homogeneity and give the conditions under which it will have increasing, decreasing and constant returns to scale.

(4+4)

(क) $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial y^q \partial x^p}$ के लिए व्यंजक की गणना करें जहाँ $z = e^{x+y}(x+y)$.

फलन $f(x, y) = xe^{-x}(y^2 - 4y)$ पर विचार करें

(क) f के सभी महत्वपूर्ण बिंदुओं को खोजें और दूसरे-व्युत्पन्न परीक्षण का उपयोग करके उन्हें वर्गीकृत करें।

(ख) दिखाएँ कि f का न तो वैश्विक अधिकतम है और न ही वैश्विक न्यूनतम।

(ग) माना $S = \{(x, y) : 0 \le x \le 5, 0 \le y \le 4\}$ । सिद्ध कीजिए कि f के S में वैश्विक अधिकतम और न्यूनतम बिंदु हैं और उन्हें ज्ञात कीजिए।

SECTION C

Attempt **any two** of the following questions.

(2×10=20)

निम्नलिखित में से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

11. (a) The principal of a college correctly estimates that if the students are instructed to attend x hours of class and do y hours of extracurricular activities, they get a test score of T and achieve student happiness level of H as given by the following relations :

(क) दो चरों के फलन f को $f(x_1, x_2) = x_1x_2^2$ द्वारा परिभाषित किया गया है। x_1 और x_2 के किन मूल्यों के लिए यह फंक्शन क्वासिकोनकेव है?

(ख) एक भेदभावपूर्ण एकाधिकार फर्म दो वस्तुओं का उत्पादन करती है जिनके मांग फलन हैं :

$$p_1 = 12 - x_1, \quad p_2 = 36 - 5x_2$$

जहाँ x_1 और x_2 उत्पादित दो वस्तुओं की मात्राएँ हैं और p_1 और p_2 प्रत्येक वस्तु की एक इकाई की कीमतें हैं। यह जानते हुए कि लागत फलन $C(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + 15$ है, संगत लाभ अधिकतम करने की समस्या को हल करें और x_1, x_2 और p_1, p_2 ज्ञात करें।

10. Consider the function $f(x, y) = xe^{-x}(y^2 - 4y)$

(a) Find all critical points of f and classify them by using the second-derivative test.

(b) Show that f has neither a global maximum nor a global minimum.

(c) Let $S = \{(x,y) : 0 \le x \le 5, 0 \le y \le 4\}$. Prove that f has global maximum and minimum points in S and find them. (4+2+4)

(ख) एक उत्पादन फलन $Q(L,K) = A\left[\alpha L^{\rho} + (1-\alpha)K^{\rho}\right]^{\frac{v}{\rho}}$ द्वारा दिया जाता है। इसकी समरूपता की डिग्री निर्धारित करें और उन शर्तों को दें जिनके तहत यह बढ़ते, घटते और निरंतर पैमाने पर रिटर्न देगा।

4. (a) Find out the values of p for which the following set of vectors is linearly independent.

$u = (3, -1, 3)$; $v = (2, 1, 0)$ and $w = (2, 0, p)$.

(b) For each value of p find out a vector z that is orthogonal to each of the above three vectors u, v and w. (4+4)

(क) p के मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए सदिशों का निम्नलिखित समुच्चय रैखिकत: स्वतंत्र है।

$u = (3, -1, 3)$; $v = (2, 1, 0)$ और $w = (2, 0, p)$.

(ख) p के प्रत्येक मान के लिए एक सदिश z ज्ञात कीजिए जो उपरोक्त तीन सदिशों u, v और w में से प्रत्येक के लिए ओर्थोगोनल है।

5. Suppose that an economy has two sectors: Light Industry (Sector 1) and Heavy Industry (Sector 2) with the following input requirements.

Light Industry requires 0.20 units of its own output and 0.70 units of Heavy Industry's output while Heavy Industry requires none of its own output and 0.50 units of Light Industry's output in order to produce 1 unit of output. The final demands for two industries are 1500 and 4500 units respectively.

(i) Write down the Leontief system for the economy.

(ii) Find the level of output that must be produced in each industry in order to meet the final demands.

(iii) Suppose the prices of both goods are Re. 1 per unit each. What are the unit cost requirements for the two goods? Are the productions economically viable? (2+4+2)

मान लीजिए कि एक अर्थव्यवस्था के दो क्षेत्र हैं: निम्नलिखित इनपुट आवश्यकताओं के साथ हल्का उद्योग (सेक्टर 1) और भारी उद्योग (सेक्टर 2)।

(क) निम्नलिखित मैट्रिक्स के eigenvalues और संबंधित eigenvectors खोजें :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ख) क्या उपरोक्त मैट्रिक्स विकर्णीय है? यदि ऐसा है, तो एक उपयुक्त आव्यूह P ज्ञात कीजिए।

9. (a) The function f of two variables is defined by $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$. For what values of x_1 and x_2 is this function quasiconcave?

(b) A discriminating monopolistic firm produces two goods whose demand functions are :

$$p_1 = 12 - x_1; \quad p_2 = 36 - 5x_2$$

where, x_1 and x_2 are the quantities of the two goods produced and p_1 and p_2 the prices of a unit of each good. Knowing that the cost function is $C(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + 15$, solve the corresponding profit maximizing problem and find x_1, x_2, p_1 and p_2. (5+5)

की 64 इकाइयों और कुशल श्रम की 27 इकाइयों को रोजगार देता है।

(i) किस दिशा में (एक इकाई वेक्टर के रूप में व्यक्त) इसे बदलना चाहिए (x, y) यदि यह वर्तमान स्तर से सबसे तेजी से आउटपुट बदलना चाहता है।

(ii) यदि फर्म अतिरिक्त कुशल श्रम की 1.5 इकाइयों को किराए पर लेती है, तो कलन का उपयोग करके अकुशल श्रम में परिवर्तन का अनुमान लगाएं जो उत्पादन को अपरिवर्तित रखेगा।

8. (a) Find the eigenvalues and the associated eigenvectors of the following matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Is the above matrix diagonalizable? If so, find a suitable matrix P. (5+5)

प्रकाश उद्योग को अपने स्वयं के उत्पादन की 0.20 इकाइयों और भारी उद्योग के उत्पादन की 0.70 इकाइयों की आवश्यकता होती है जबकि भारी उद्योग को अपने स्वयं के उत्पादन की आवश्यकता नहीं होती है और उत्पादन की 1 इकाई का उत्पादन करने के लिए हल्के उद्योग के उत्पादन की 0.50 इकाइयों की आवश्यकता होती है। दो उद्योगों की अंतिम मांग क्रमशः 1500 और 4500 यूनिट है।

(i) अर्थव्यवस्था के लिए लियोनटिफ प्रणाली लिखिए।

(ii) अंतिम मांगों को पूरा करने के लिए प्रत्येक उद्योग में उत्पादन के स्तर का पता लगाएं।

(iii) मान लीजिए कि दोनों वस्तुओं की कीमतें रु हैं। 1 प्रति यूनिट प्रत्येक दो वस्तुओं के लिए इकाई लागत आवश्यकताएं क्या हैं? क्या निर्माण आर्थिक रूप से व्यवहार्य हैं?

6. (a) For the following function defined on R^2, find the critical points and classify them as maxima, minima or saddle:

$$f(x, y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$$

(b) Determine the concavity or convexity of the following function. Also check for the quasi-concavity and quasi-convexity.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz \qquad (4+4)$$

(क) R2 पर परिभाषित निम्नलिखित फंक्शन के लिए, महत्वपूर्ण बिंदु खोजें और उन्हें मैक्सिमा, मिनिमा या सैडल के रूप में वर्गीकृत करें :

$$f(x, y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$$

(ख) निम्नलिखित फलन की अवतलता या उत्तलता ज्ञात कीजिए। अर्ध-अवतलता और अर्ध-उत्तलता की भी जाँच करें।

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz$$

SECTION B

Attempt **any three** of the following questions.

(3×10=30)

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

7. (a) Find the level curve for the function

$$f(x,y)=\frac{2x-2y}{x^2+y^2+1}$$ at k = –1, 0, 1, and plot them in the same graph.

(b) A firm uses x hours of unskilled labour and y hours of skilled labour each day to produce $Q(x,y)=60x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ units of output. It currently employs 64 units of unskilled and 27 units of skilled labour.

(i) In what direction (expressed as a unit vector) should it change (x,y) if it wants to change output most rapidly from the current level.

(ii) If the firm hires 1.5 units of extra skilled labour, using calculus estimate the change in unskilled labour that will keep the output unchanged. (5+5)

(क) फंक्शन $f(x,y)=\frac{2x-2y}{x^2+y^2+1}$ के लिए के = –1, 0, 1 पर स्तर वक्र खोजें और उन्हें उसी ग्राफ में प्लॉट करें।

(ख) एक फर्म उत्पादन के $Q(x,y)=60x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ इकाइयों का उत्पादन करने के लिए प्रत्येक दिन x घंटे अकुशल श्रम और y घंटे कुशल श्रम का उपयोग करती है। यह वर्तमान में अकुशल